1 0 1 6

1965 г.

9



По заказу Министерства просвещения РСФСР

ГОМОТЕТИЯ

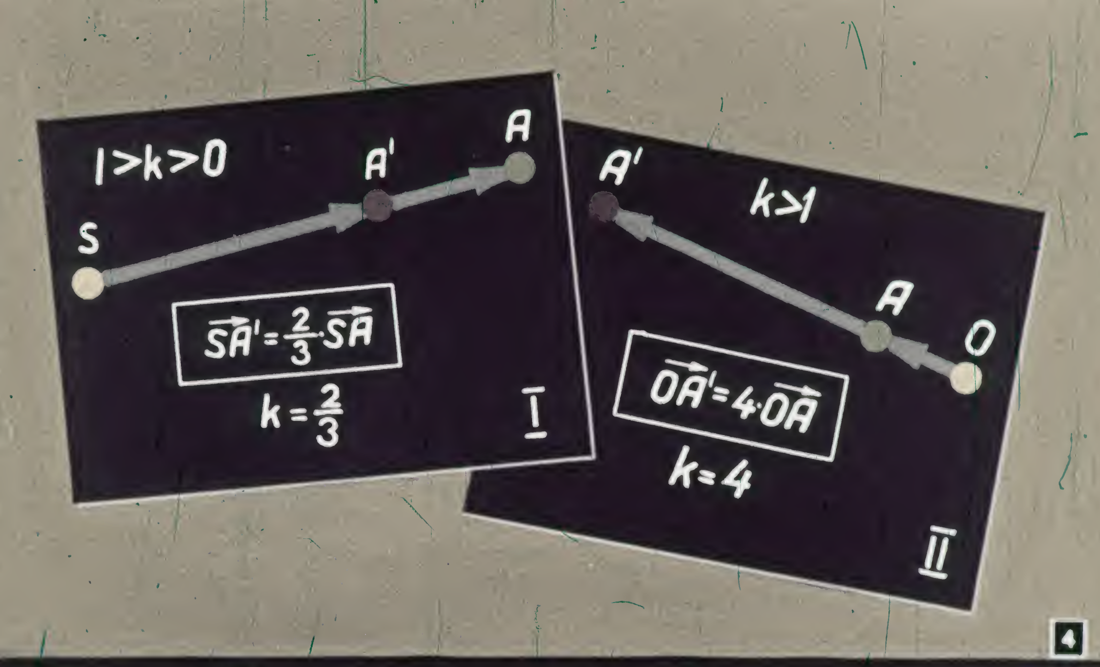
Диафильм по математике для средней школы

ФРАГМЕНТ I.

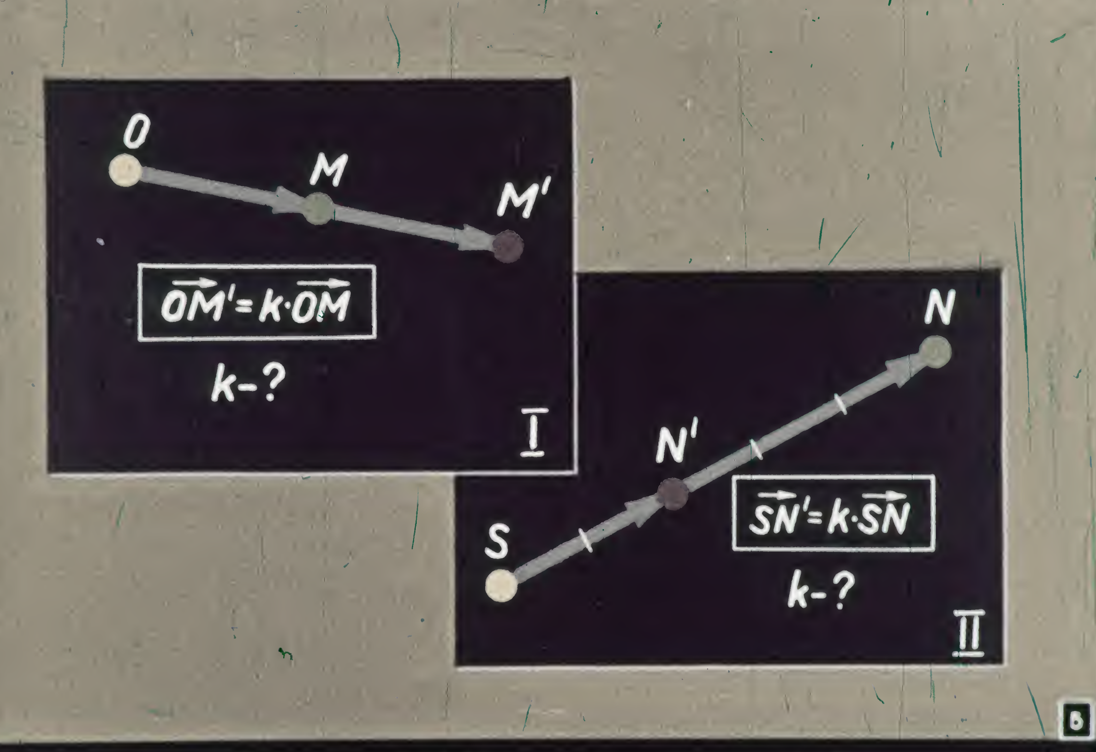
ГОМОТЕТИЯ ТОЧЕК



Если вектор $\overrightarrow{OA'}$ равен произведению числа К на вектор $\overrightarrow{OA}$, то точки A' и A называются гомотетичными относительно точки O.



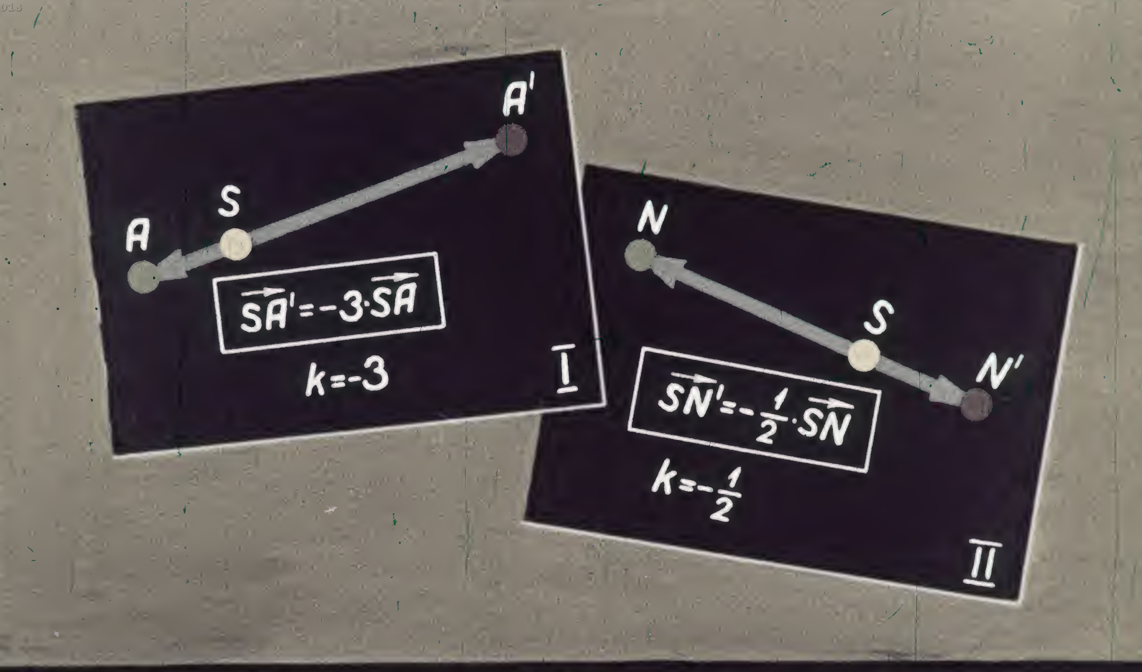
Если коэффициент гомотетии положителен, то гомотетия называется положительной (или прямой), центр гомотетии – внешним.



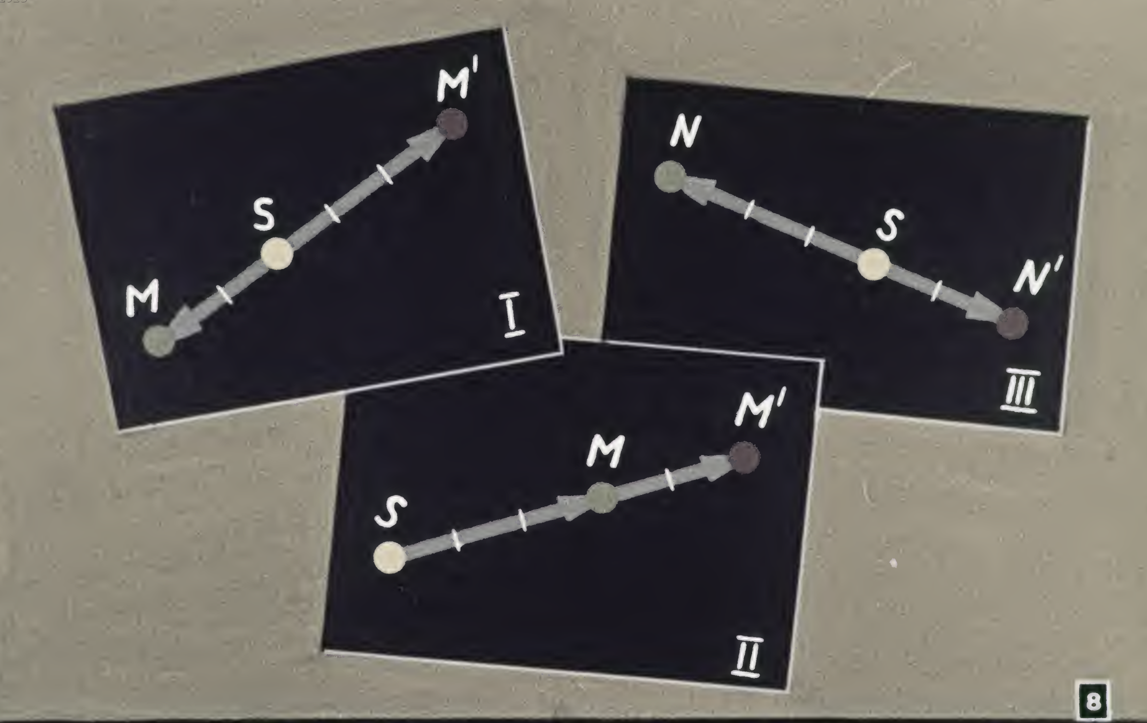
Задача 1. Найдите значение *k*.



Задача 2. Дана точка A, центр гомотетии S и $k=\frac{1}{6}$. Выполнить гомотетию точки A.



При отрицательном коэффициенте гомотетия называется отрицательной (или обратной), а центр гомотетии – внутренним.



Задача 3. Найдите значение k.



Задача 4. Дана точка M и центр гомотетии S. Выполните гомотетию точки M при: 1). $k=-2$; 2). $k=-\frac{1}{4}$.

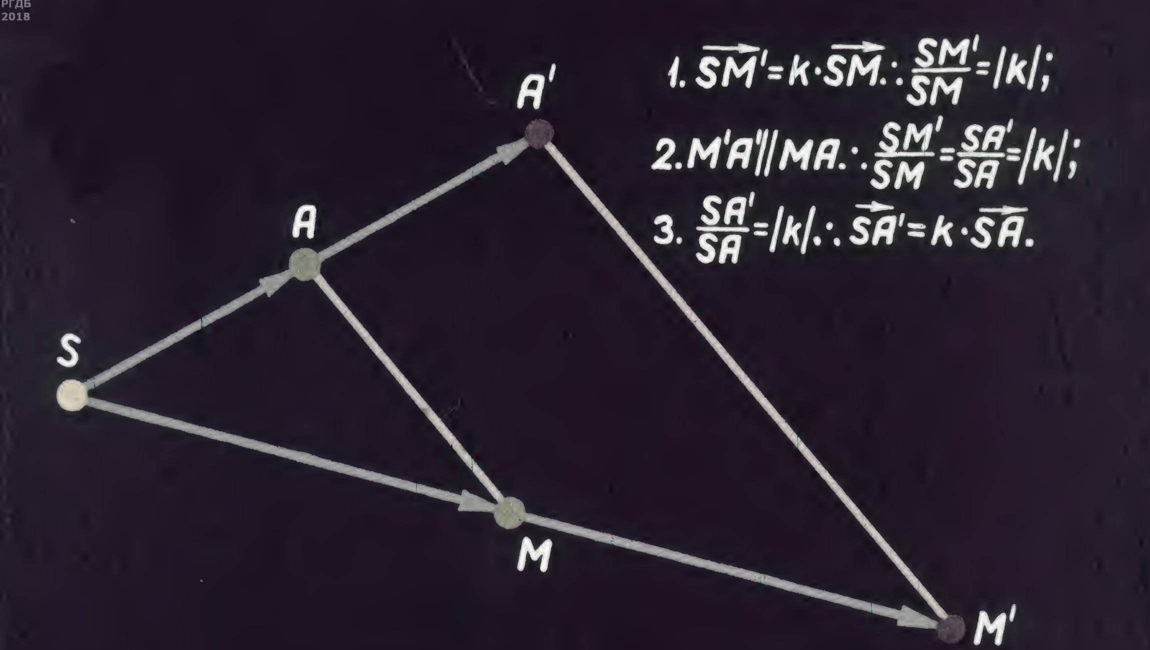


S

M

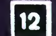
M′

Задача 5. Дана точка A. Гомотетия задана центром S и двумя точками M и M', гомотетичными относительно этого центра. Постройте точку A', гомотетичную точке A относительно центра S.



Проведём $M'A' \parallel MA$. Докажем, что точка A' гомотетична точке A, т. е. $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$.

ГОМОТЕТИЯ КАК ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ



$$\overrightarrow{SM'} = k \cdot \overrightarrow{SM}$$

$F \to F'$ при k;

$F' \to F$ при $k' = \frac{1}{k}$.

Выполним гомотетию каждой точки фигуры F.

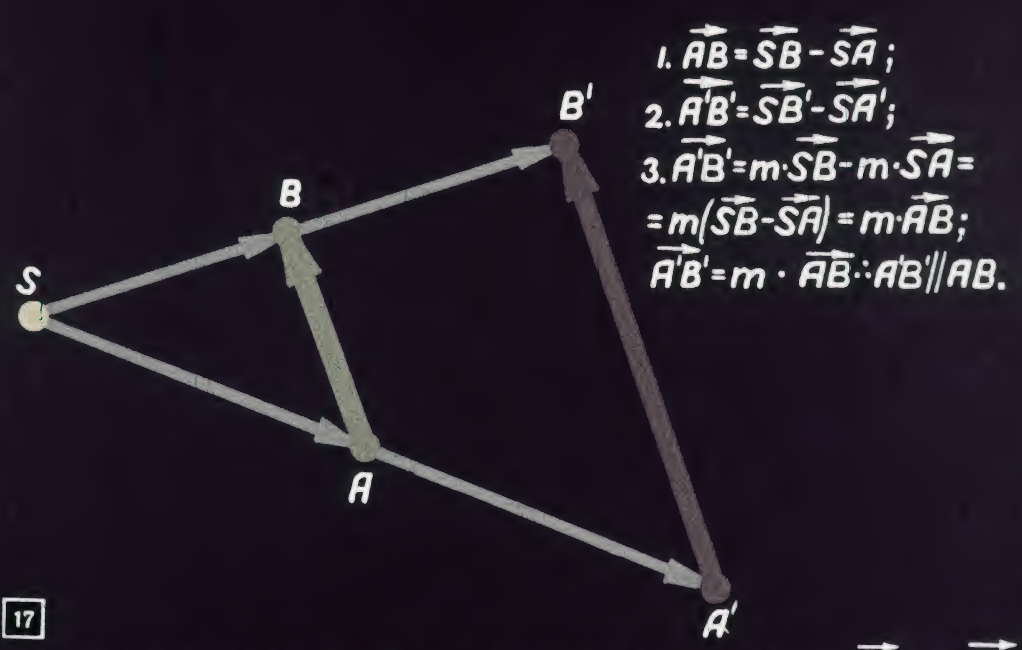
Каждой точке фигуры F соответствует по определённому правилу точка фигуры F'. Следовательно, гомотетия – геометрическое преобразование.

ФРАГМЕНТ III.

ГОМОТЕТИЯ
ОТРЕЗКА, ЛУЧА, ПРЯМОЙ



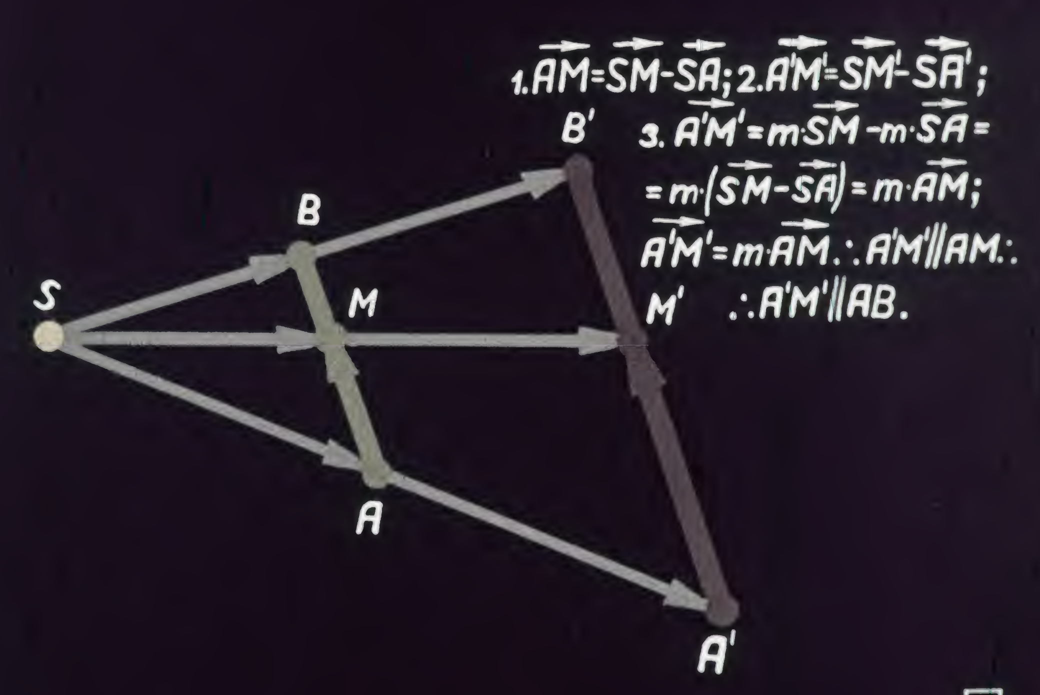
Выполним гомотетию концов отрезка AB.

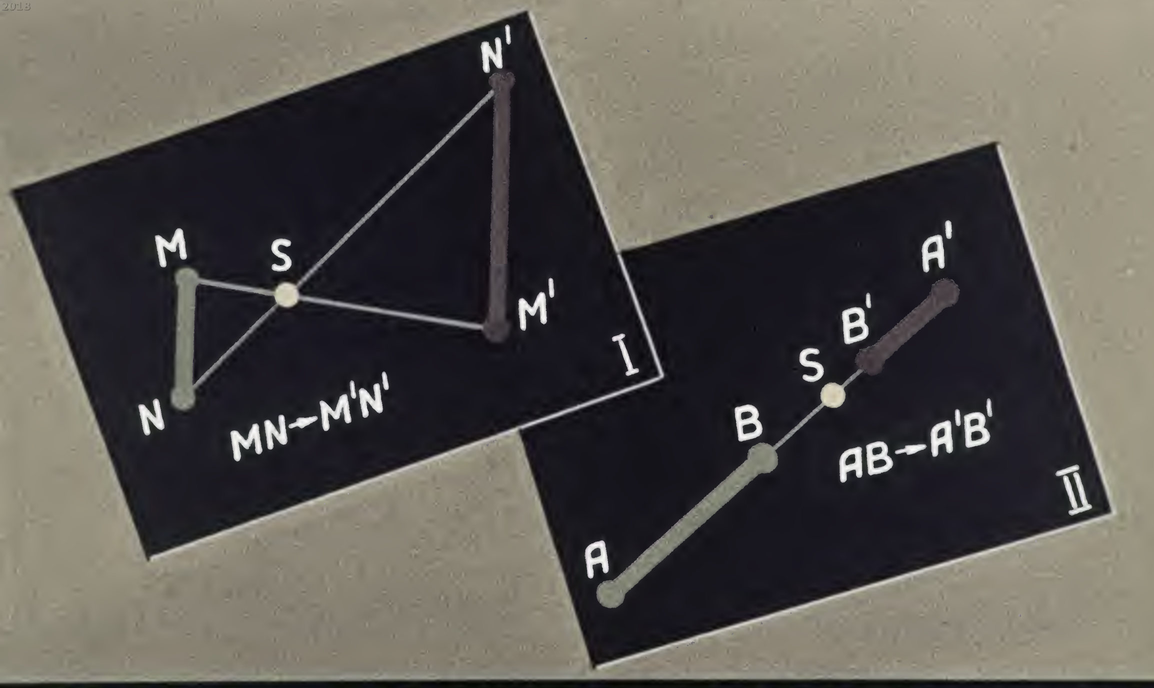


Установим зависимость между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A'B'}$.

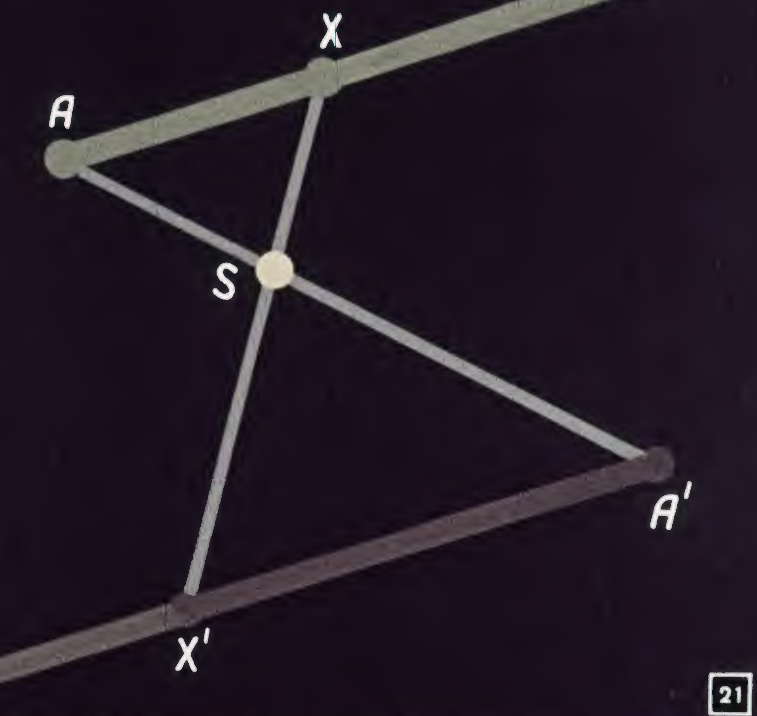


Выполним гомотетию любой точки M, принадлежащей отрезку AB и рассмотрим векторы $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{A'M'}$. Отрезки $A'M'$ и $A'B'$ имеют общую точку A' и параллельны одной и той же прямой AB. Следовательно, они лежат на одной прямой, т. е. точка M' лежит на отрезке $A'B'$.


1. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SA}$; 2. $\overrightarrow{A'M'}=\overrightarrow{SM'}-\overrightarrow{SA'}$;
3. $\overrightarrow{A'M'}=m\cdot\overrightarrow{SM}-m\cdot\overrightarrow{SA}=$
$=m\cdot(\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SA})=m\cdot\overrightarrow{AM}$;
$\overrightarrow{A'M'}=m\cdot\overrightarrow{AM}$. ∴ $A'M' \parallel AM$ ∴
∴ $A'M' \parallel AB$.
B'
B
S
M
M'
A
A'



Мы доказали, что гомотетия преобразует отрезок в отрезок. Гомотетичные отрезки параллельны или лежат на одной прямой.



Гомотетия преобразует луч в параллельный луч. Докажите.

X'

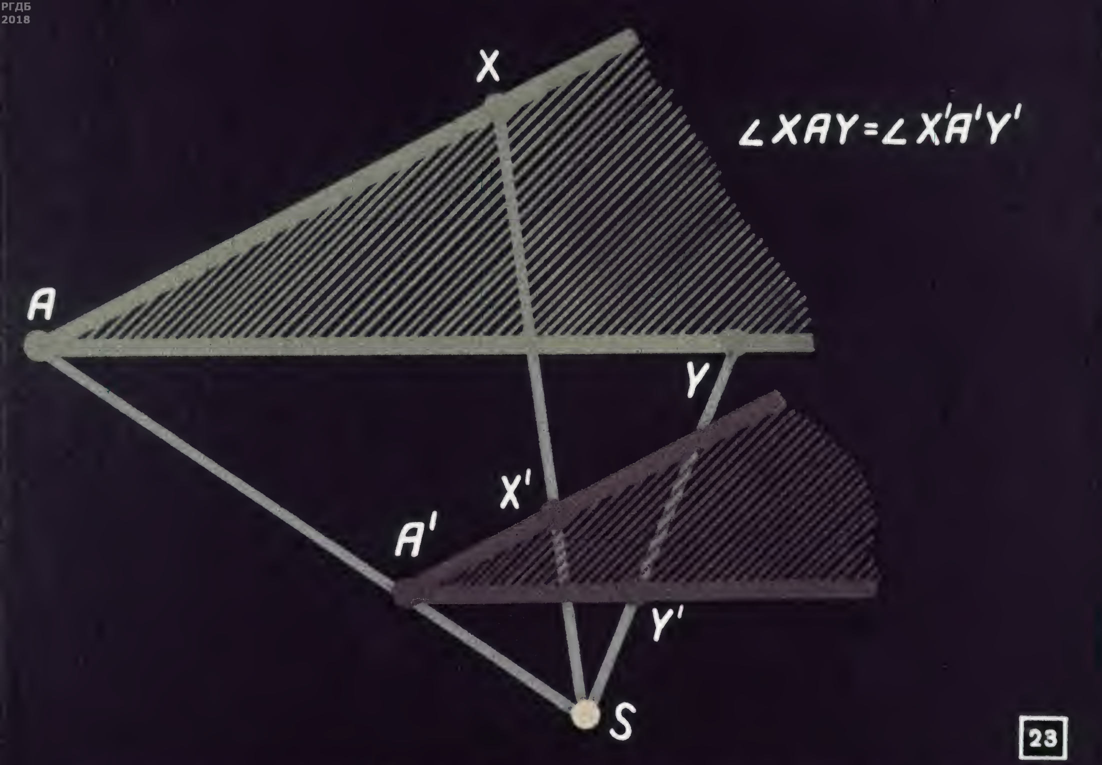
X

Y

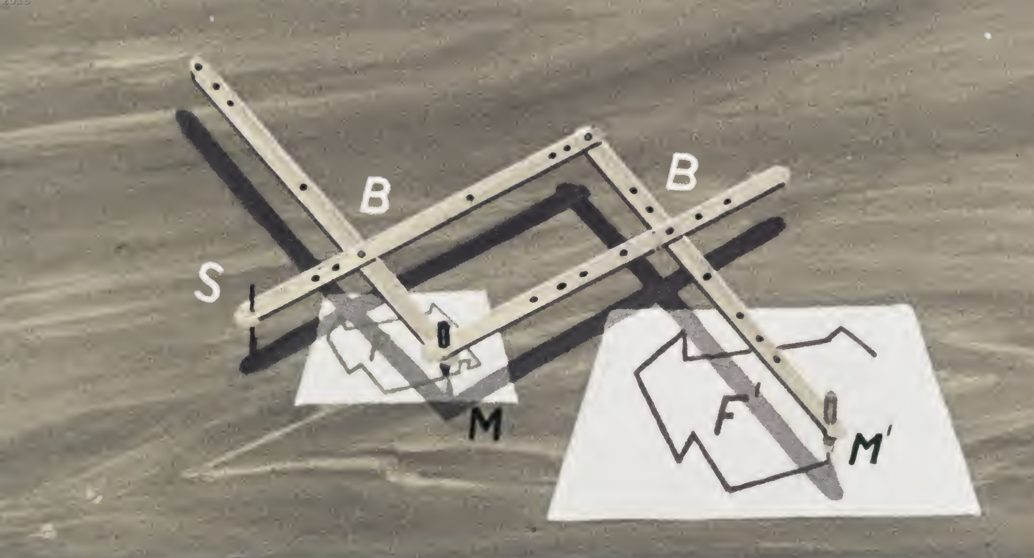
Y'

S

Гомотетия преобразует прямую в параллельную прямую. Докажите.



Гомотетия преобразует угол в равный угол. Докажите.



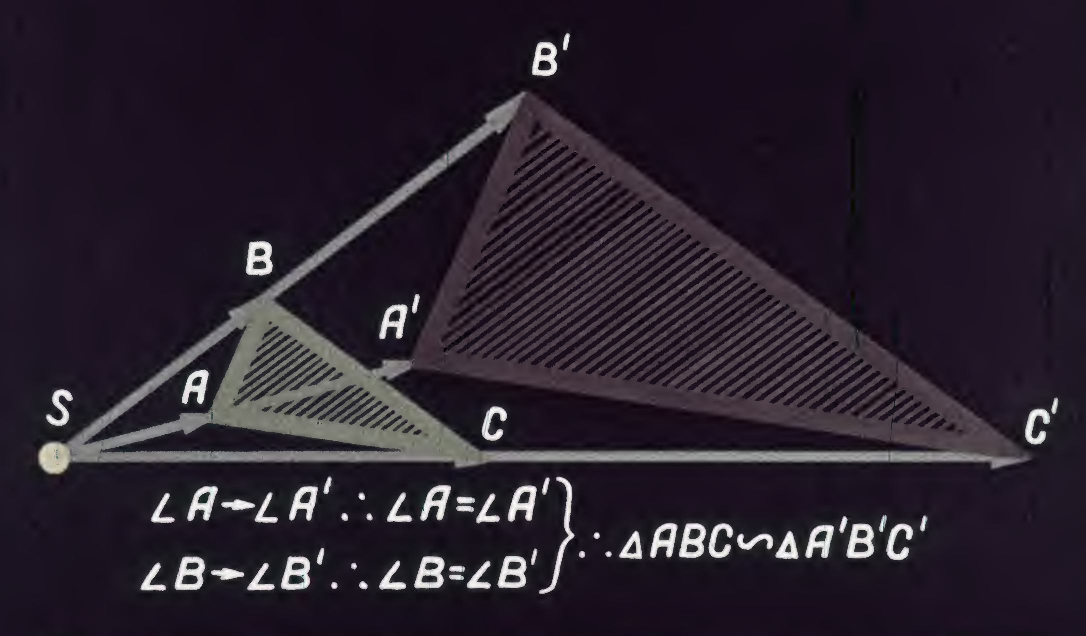
Фигуру, гомотетичную данной, можно получить с помощью прибора-пантографа. Штифтом (M) обводят контуры данной фигуры F. Карандаш (M') чертит гомотетичную фигуру F'. Винты (B) устанавливаются на делениях, соответствующих выбранному коэффициенту гомотетии.



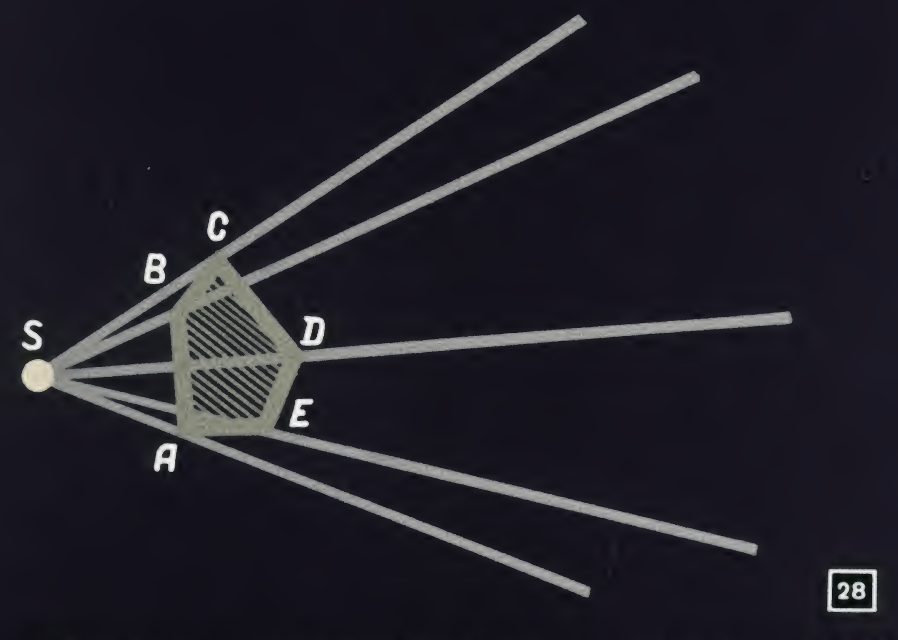
Для увеличения или уменьшения рисунков, чертежей, географических карт применяются специальные чертёжные пантографы.

ФРАГМЕНТ IV.

СВЯЗЬ ГОМОТЕТИИ С ПОДОБИЕМ



Гомотетия преобразует треугольник в подобный треугольник.



Выполним гомотетию многоугольника ABCDE.

S
C'
B'
C
B
D'
D
E
E'
A
A'

Гомотетия преобразует многоугольник в подобный многоугольник.



F' гомотетична F $\therefore$ $F' \backsim F$

$F'' \backsim F$, но F и F'' не гомотетичны

Из гомотетии двух фигур следует, что они подобны. Справедливо ли обратное предложение?

ФРАГМЕНТ V.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПРИМЕНЕНИЕМ ГОМОТЕТИИ

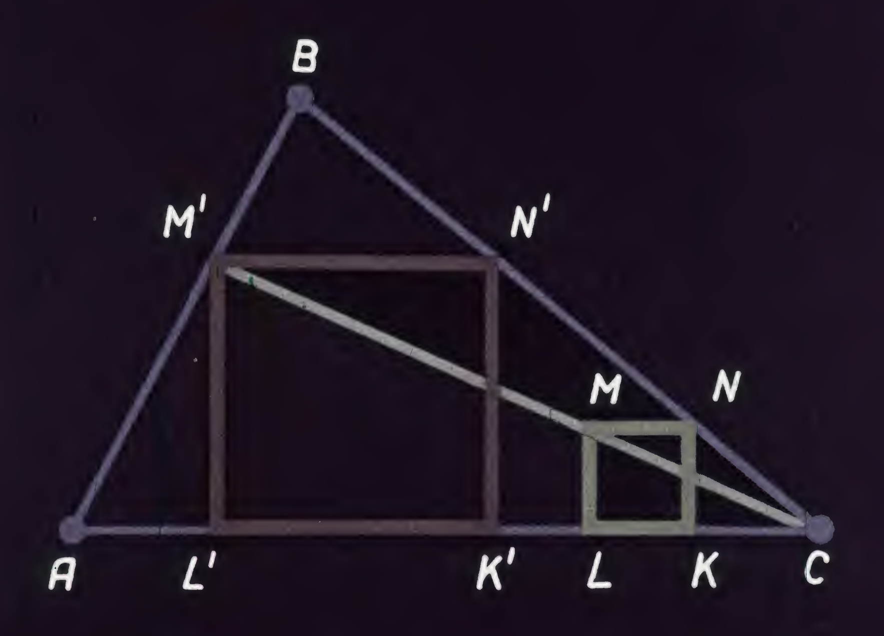


B

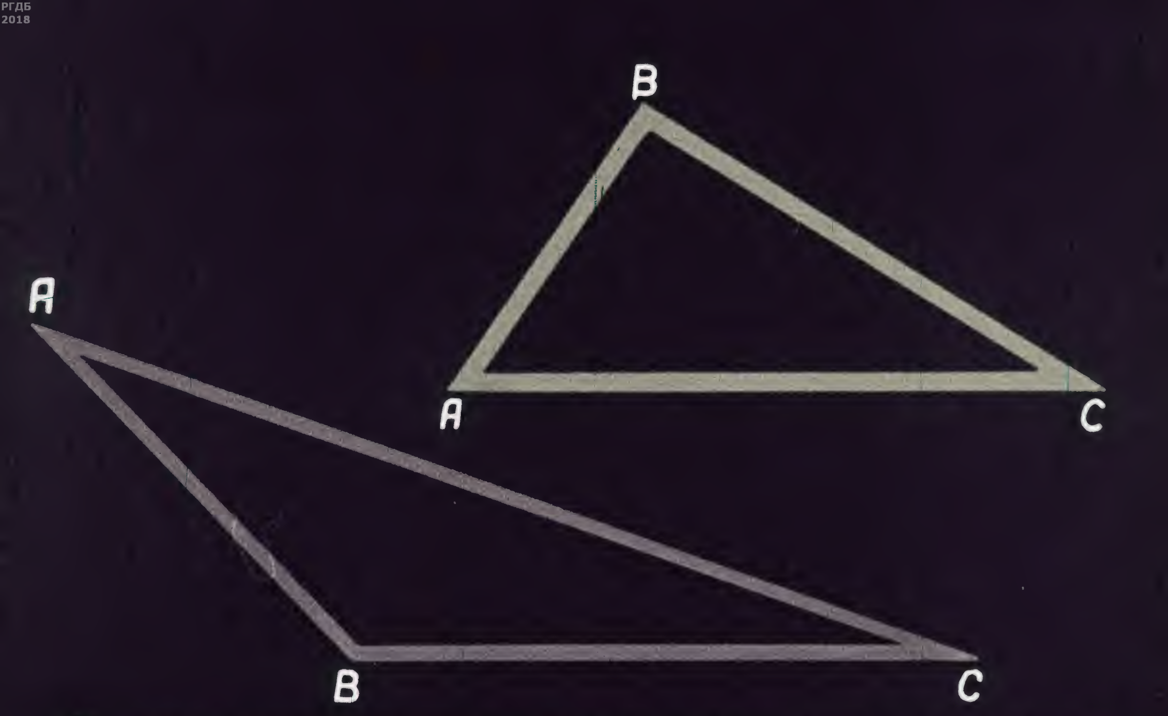
A C

Задача 6. В данный остроугольный треугольник вписать квадрат так, чтобы две его вершины принадлежали одной из сторон треугольника, а две – другим сторонам, по одной на каждой.

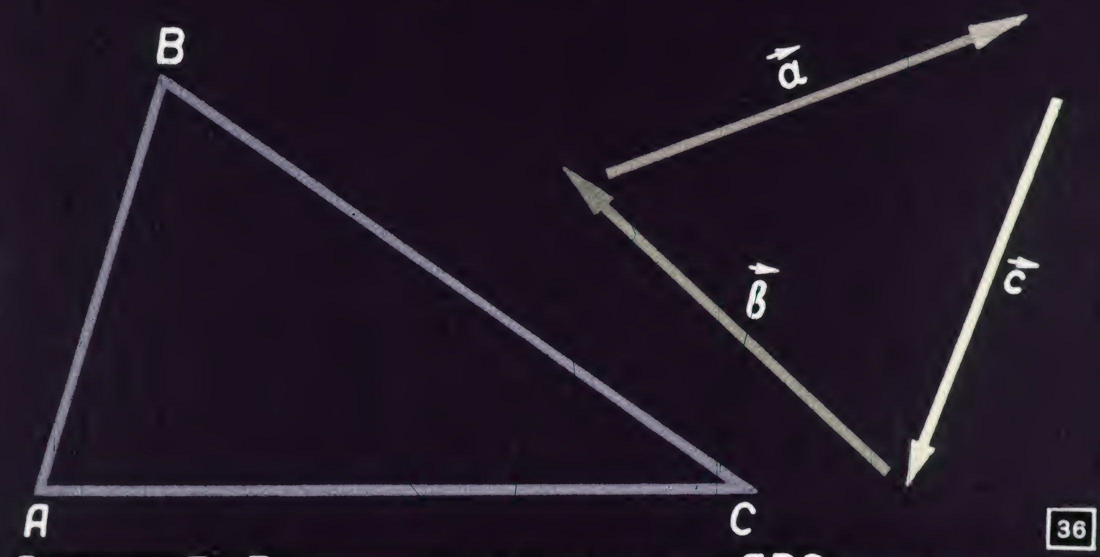
Построим квадрат $MNKL$. Вершину треугольника C примем за центр гомотетии. Точка M' гомотетична точке M относительно центра C.



Квадрат $M'N'K'L'$ – искомый. Сколько решений имеет эта задача?



Решите аналогичные задачи для прямоугольного и тупоугольного треугольников ABC.



Задача 7. В данный треугольник ABC вписать другой треугольник так, чтобы его вершины лежали по одной на каждой из сторон данного треугольника, а стороны были бы параллельны трём данным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.



B
N
M
K
A
C
$\vec{a}$
$\vec{b}$
$\vec{c}$

Построим $MN \parallel \vec{a}$, $MK \parallel \vec{b}$, $NK \parallel \vec{c}$.



Примем вершину **B** за центр гомотетии. Построим **$K'N' \parallel KN$, $K'M' \parallel KM$**. Докажите, что **$\Delta K'M'N'$** – искомый.



Задача 8. Даны три луча, имеющие общее начало O. Луч в, расположенный между лучами a и c, с каждым из них образует острый угол. Построить окружность с центром, лежащим на луче в, касающуюся луча a и отсекающую на луче c отрезок ℓ.

40

В результате построения должна получиться следующая фигура.



Для этого строим произвольную окружность D с центром на луче b, касающуюся луча a и отсекающую на луче c произвольный отрезок m.



Выполним гомотетию этой окружности, приняв за центр гомотетии точку O. Коэффициент гомотетии равен отношению l к m.



$|k| = \frac{\ell}{m}$

Окружность D' – искомая. Докажите это. Проведите исследование задачи.

КОНЕЦ

Автор А. М. Пышкало
Редактор Л. Б. Книжникова
Чертежи С. Н. Рогова
Художник-оформитель С. Н. Рогов

Д-416-65

Студия „Диафильм", 1965 г.
Москва, Центр, Старосадский пер., д. № 7
Цветной 0-30